Faculté Polydisciplinaire de Khouribga Année Universitaire 2020/2021

SMIA (S1), Algèbre 1
Série N° : 1

Ex. 1 — Soient R, S, T et U sont des relations. Montrer que si les relations $R \Rightarrow S$, $T \Rightarrow U$ sont vraies, la relation

$$(R \,\mathrm{ou}\, T) \Longrightarrow (S \,\mathrm{ou}\, U)$$

est vraie. (En déduire que si les relations $R \Leftrightarrow S$, $T \Leftrightarrow U$ sont vraies, la relation

$$(R \,\mathrm{ou}\, T) \Longleftrightarrow (S \,\mathrm{ou}\, U)$$

est vraie.)

Answer (Ex. 1) — D'après (TL8) et (AL8), les implications suivantes sont vraies :

$$(R \,\mathrm{ou}\, T) \Longrightarrow (S \,\mathrm{ou}\, T) \Longrightarrow (S \,\mathrm{ou}\, U).$$

On conclut en appliquant (TL1).

Ex. 2 — Soient R et S des relations. Démontrer que :
1) Si R est fausse, (R ou S) $\Longleftrightarrow S$ est vraie.
2) Si R est vraie, (R et S) $\Longleftrightarrow S$ est vraie.

Answer (Ex. 2) — 2) On suppose que R est vraie. D'après (TL13), l'implication (R et S) $\Rightarrow$ S est toujours vraie. Si S est vraie, alors (R et S) est vraie (cf. (TL13)), en vertu de la méthode de l'hypothèse auxiliaire, l'implication $S \Rightarrow$ (R et S) est aussi vraie. On conclut en appliquant (TL13).
1) On suppose que R est fausse c-à-d (non R) est vraie. D'après 2),

$$(\mathrm{non} R \;\text{ et non}\, S) \Longleftrightarrow \mathrm{non}\, S$$

est vraie. D'après (TL15), (1.1) ; (TL16), (1.9) ; (TL14),

$$[(\text{non non}\, R) \;\text{ ou }\, (\text{non non}\, S)] \Longleftrightarrow S$$

est vraie. D'après (TL16), (1.9) ; Ex. 1, (TL13),

$$[(\text{non non}\, R) \;\text{ ou }\, (\text{non non}\, S)] \Longleftrightarrow (R \text{ ou } S)$$

est vraie. On conclut en utilisant (TL14).

Ex. 3 — Soient R et S deux relations. Montrer que, si R est fausse, la relation $R \Longrightarrow S$ est vraie. Peut-on déduire de là que S est vraie ?

Answer (Ex. 3) — On suppose que R est fausse, c-à-d, (non R) est vraie. La relation $R \Longrightarrow S$ n'est autre que (non R) ou S. On conclut en utilisant (AL 2). Ceci quelle que soit la relation S.

Ex. 4 — Soient R et S des relations. Montrer que la relation

$$[R \,\text{et}\, (\text{non } R)] \Longrightarrow S$$

est vraie.

Answer (Ex. 4) — Notre relation n'est autre que

$$\text{non non}[\text{non}\, R\, \text{ou}\, (\text{non non } R)]\text{ou } S$$

qui est vaie compte tenu de (TL 4) ; (TL 16), (1.9) ; (AL 2).

Ex. 5 — Écrire la contraposée et la négation des implications suivantes :

(i) Si $x \geq 0$ alors $f(x) < 0$;

(ii) Si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$;

(iii) Si p divise ab alors p divise l'un d'entre eux ;

(iv) Si A est non vide alors A possède un plus petit élément.

Answer (Ex. 5) — La contraposée de ces relations :
(i) $f(x) \geq 0 \Rightarrow x < 0$.
(ii) $(a \neq 0 \,\text{et}\, b \neq 0) \Rightarrow ab \neq 0$.
(iii) $(p \nmid a \,\text{et}\, p \nmid b) \Rightarrow p \nmid ab$.
(iv) $(\forall x \in A, \exists a_1 \in A, x \nleq a_1) \Rightarrow A = \varnothing$ (la relation "A possède un plus petit élément" s'écrit $\exists a_0 \in A, \forall a \in A,\, a_0 \leq a$, donc sa négation est $\forall a_0 \in A, \exists a \in A, a_0 \nleq a$).

La relation non $(R \Rightarrow S)$ est équivalente à R et non S (s'en convaincre). La négation de ces relations :
(i) $x \geq 0$ et $f(x) \geq 0$.
(ii) $ab = 0$ et $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
(iii) $p \mid ab$ et $p \nmid a$ et $p \nmid b$.
(iv) $A \neq \varnothing$ et $(\forall x \in A, \exists a_1 \in A, x \nleq a_1)$.

Pour me contacter : mohssin.zarouali@gmail.com